第9講　実践演習問題 第2問

第2問 （必須問題）

〔1〕 x を正の実数とする。AC＝6，BC＝x，∠A＝60° であるような，△ABC がただ一つに定まるための x の条件を太郎さん，花子さんはそれぞれ次のように考えた。

(1) まず太郎さんは，正弦定理を利用して考えた。

辺ACの長さがわかっているから，

$$\sin B = \frac{\boxed{\text{ア}}\sqrt{\boxed{\text{イ}}}}{x}$$

となる。$x = \boxed{\text{ア}}\sqrt{\boxed{\text{イ}}}$ のとき，$B = \boxed{\text{ウエ}}^\circ$ となり，△ABC はただ一つに決まる。

また，$0^\circ < B < \boxed{\text{オカキ}}^\circ$ であるから，$\dfrac{\boxed{\text{ア}}\sqrt{\boxed{\text{イ}}}}{x} \leqq \dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ク}}}}{\boxed{\text{ケ}}}$，

つまり $x \geqq \boxed{\text{コ}}$ のとき，△ABC はただ一つに決まる。

（第2問〔1〕は次ページに続く。）

(2) 次に花子さんは，余弦定理を利用する方法を考えた。

(i) AB＝t とおくと，[サ]＝0 のような関係式ができる。次の⓪～⑤のうちから一つ選べ。

⓪ $t^2+6t+36-x^2$　① $t^2-6t+36-x^2$　② $t^2-6t-36-x^2$
③ $t^2+6t-36+x^2$　④ $t^2-12t-36+x^2$　⑤ $t^2+12t+36-x^2$

(ii) この [サ]＝0 を t の２次方程式とみたとき，どのような条件を満たすべきか，最も適当なものを，次の⓪～④のうちから一つ選べ。[シ]

⓪ t の２次方程式が，重解をもつ。
① t の２次方程式が，正の解を２つもつ。
② t の２次方程式が，正の解を１つだけもつ。
③ t の２次方程式が，異なる２つの実数解をもつ。
④ t の２次方程式が，少なくとも１つの実数解をもつ。

さらに，$f(t)$＝[サ] とおき，$f(t)=0$ の判別式を D とすると，[シ] の条件をみたすためには，[ス] または [セ] であればよい。

(iii) [ス]，[セ] に当てはまるものとして最も適当なものを，次の⓪～⑨のうちから一つずつ選べ。ただし，解答の順番は問わない。

⓪ $D>0$　① $D=0$　② $D<0$　③ $D\geqq 0$　④ $D\leqq 0$
⑤ $f(0)>0$　⑥ $f(0)=0$　⑦ $f(0)<0$　⑧ $f(0)\geqq 0$　⑨ $f(0)\leqq 0$

〔２〕 あるクラスの生徒 10 人に対して，20 点満点の数学のテストと 100 満点の英語のテストを実施した。

生徒 10 人のテストの結果は以下のような点数となった。

生徒	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩
数学	7	8	9	10	11	12	13	15	17	18
英語	55	70	55	80	60	60	50	65	55	50

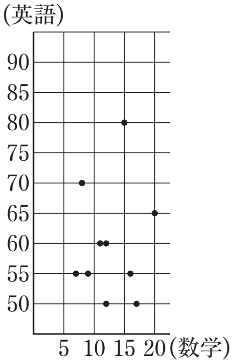
(1) 数学の点数について，次のそれぞれの値を求めよ。

平均値 ［ソタ］

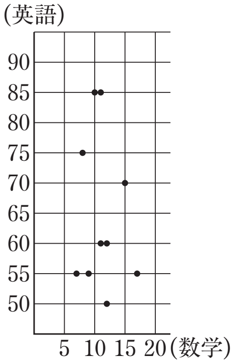
分散 ［チツ.テ］

(2) 英語と数学の点数について散布図に表した。正しいものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ。［ト］

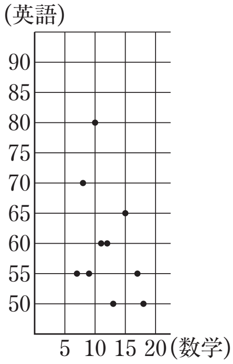
⓪



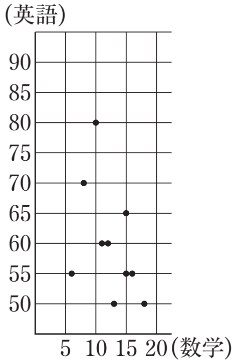
①



②



③



(第２問〔２〕は次ページに続く。)

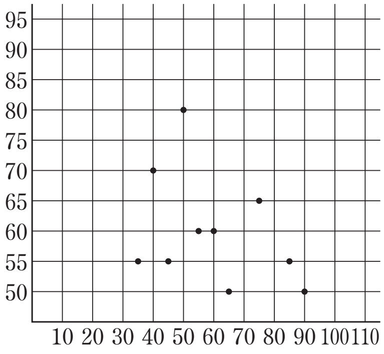
さらに，数学の点数の分散を X，英語の点数の分散を Y とし，数学の点数と英語の点数の共分散を A で表すこととする。

後日，生徒 10 人の成績をまとめることにした。数学の点数を 100 点満点にするために，全員の点数を 5 倍し，さらに基礎点数 5 点を加点した。また，全員の英語の点数に基礎点数 5 点を加算した。このとき点数の変更後の数学の点数の分散を X'，英語の点数の分散を Y'，数学の点数と英語の点数の共分散を A' で表す。

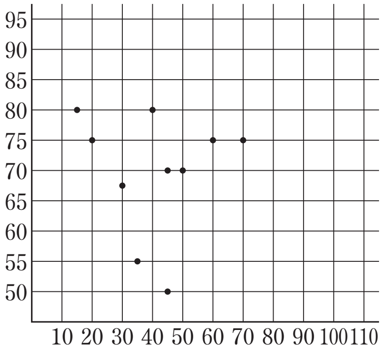
(3)　数学の点数を 5 倍した後の散布図として正しいものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ。

ナ

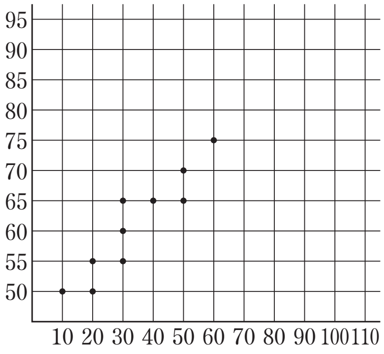
⓪



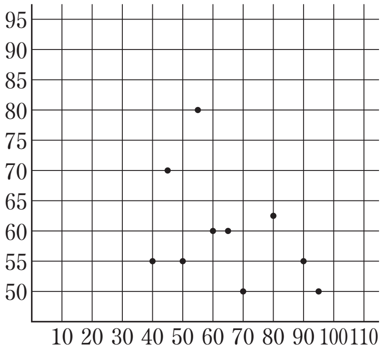
①



②



③



（第２問〔２〕は次ページに続く。）

また，分散や共分散について点数の変更前と変更後がどのように変化するかを考えてみる。

このとき，各値の偏差がどのように変化するかを考えていくことにして，生徒10人の変更前の英語の点数をそれぞれ y_1，y_2，y_3，…，y_9，y_{10} とし，その平均値を $\overline{y}$ とすれば，各点数に5点を加算したときの平均値は

$$\overline{y}+5\,(\text{点})$$

であるので，偏差はそれぞれ

$$y_1+5-(\overline{y}+5),\ y_2+5-(\overline{y}+5),\ \cdots,\ y_{10}+5-(\overline{y}+5)$$

となる。したがって，その分散 Y' を，Y を用いて表すと，

$$Y'=\frac{1}{10}[\{y_1+5-(\overline{y}+5)\}^2+\{y_2+5-(\overline{y}+5)\}^2+\cdots+\{y_{10}+5-(\overline{y}+5)\}^2]$$

より，$\dfrac{Y'}{Y}=$ [ニ] である。

同様に考えて，

$$\frac{X'}{X}=\text{[ヌ]}$$

$$\frac{A'}{A}=\text{[ネ]}$$

(4) [ニ]，[ヌ]，[ネ] に当てはまる数を次の⓪～⑥のうちからそれぞれ一つ選んで答えよ。

⓪ 0　① 1　② 5　③ 25

④ −1　⑤ −5　⑥ −25

(5) 後日，クラスの生徒10人のうち，1人が転校して9人となったが平均値は数学，英語ともに変わらなかった。転出した生徒は [ノ] である。また，英語について，10人のときの分散の値は Y であるが，残った9人についての分散の値を Y'' とすると，

$$\frac{Y''}{Y}=\frac{\text{[ハヒ]}}{\text{[フ]}}$$

が成り立つ。

＜ NOTE ＞

第9講　実践演習問題 第2問

第2問〔1〕

(1)　△ABC において正弦定理より，

$$\frac{\mathrm{BC}}{\sin A}=\frac{\mathrm{AC}}{\sin B}$$

$$\frac{x}{\sin 60^\circ}=\frac{6}{\sin B}$$

$$\sin B=6\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{x}=\frac{3\sqrt{3}}{x}$$

となる。

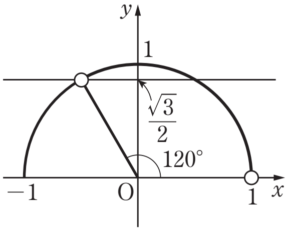
$x=3\sqrt{3}$ のとき，$\sin B=1$ より $B=90^\circ$ となり，$C=30^\circ$，$c=3$ となることから，△ABC はただ一つに決まる。

また，∠A＝60° であり，三角形の内角の和が 180° であることから，$0^\circ<B<120^\circ$ である。

よって，$\sin B\leqq\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\frac{3\sqrt{3}}{x}\leqq\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$x>0$ より $\frac{x}{3}\geqq 2$



したがって $x\geqq 6$ のとき △ABC はただ一つに決まる。

(2)(i)　△ABC に余弦定理を用いると，

$$x^2=6^2+t^2-2\cdot 6\cdot t\cdot\cos 60^\circ$$
$$=36+t^2-6t$$

よって $t^2-6t+36-x^2=0$（①）

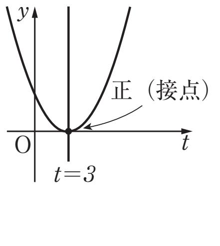
(ii)　t の値が正の数でただ1つに決まれば，辺 AB の長さが1つに決まる。

よって，t の 2 次方程式 $t^2-6t+36-x^2=0$ が，正の解を 1 つだけもてばよい（②）

(iii)　さらに，$f(t)=t^2-6t+36-x^2$ とおき，$f(t)=0$ の判別式を D として，$f(t)=0$ が正の解を 1 つだけもつための条件を考える。 $f(t)=(t-3)^2-x^2+27$

より，グラフの軸は $t=3>0$

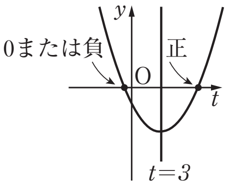
よって，$D=0$（①），すなわち放物線 $y=f(t)$ の頂点の y



座標が0であれば，2次方程式 $f(t)=0$ は正の重解をもち，条件を満たす。

このとき，$-x^2+27=0$　　$x>0$ より　$x=3\sqrt{3}$

また，グラフの軸が $t=3>0$ であることより，$f(0)\leqq 0$ (⑨)であれば，2次方程式 $f(t)=0$ は正の解と，0 または負の解を1つずつもち，条件を満たす。



このとき，$f(0)=36-x^2\leqq 0$　　$(x-6)(x+6)\geqq 0$

$x>0$ より $x\geqq 6$

〔2〕

(1)　数学の点数の平均値は

$$\frac{1}{10}(7+8+9+10+11+12+13+15+17+18)=12(\text{点})$$

数学の点数の分散は

$$\frac{1}{10}\{(7-12)^2+(8-12)^2+(9-12)^2+(10-12)^2+(11-12)^2+(12-12)^2+(13-12)^2+(15-12)^2+(17-12)^2+(18-12)^2\}$$

$=12.6$

(2)　正しい散布図は　②

(3)　正しい散布図は　⓪

(4)　生徒10人の変更前の英語の点数をそれぞれ y_1，y_2，……，y_{10}，平均値を $\overline{y}$ とすると，英語の点数の分散は　$Y=\dfrac{1}{10}\{(y_1-\overline{y})^2+(y_2-\overline{y})^2+\cdots\cdots+(y_{10}-\overline{y})^2\}$

さらに，英語の各点数に5点を加点した後の英語の点数の分散は

$$Y'=\frac{1}{10}\left[\{y_1+5-(\overline{y}+5)\}^2+\{y_2+5-(\overline{y}+5)\}^2+\cdots\cdots+\{y_{10}+5-(\overline{y}+5)\}^2\right]$$

$$=\frac{1}{10}\{(y_1-\overline{y})^2+(y_2-\overline{y})^2+\cdots\cdots+(y_{10}-\overline{y})^2\}$$

$$=Y$$

より，$\dfrac{Y'}{Y}=1$（①）

同様に，生徒10人の変更前の数学の点数をそれぞれ x_1，x_2，……，x_{10}，平均値を $\overline{x}$ とすると，数学の点数の分散は

$$X=\frac{1}{10}\{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots\cdots+(x_{10}-\overline{x})^2\}$$

さらに，数学の各点数を5倍して5点加えた後の数学の点数の平均値は，$5\overline{x}+5$

点であるので，変更後の数学の点数の分散は

$$X'=\frac{1}{10}\left[\left\{5x_1+5-\left(5\overline{x}+5\right)\right\}^2+\left\{5x_2+5-\left(5\overline{x}+5\right)\right\}^2+\cdots\cdots+\left\{5x_{10}+5-\left(5\overline{x}+5\right)\right\}^2\right]$$

$$=\frac{1}{10}\left[\left\{5\left(x_1-\overline{x}\right)\right\}^2+\left\{5\left(x_2-\overline{x}\right)\right\}^2+\cdots\cdots+\left\{5\left(x_{10}-\overline{x}\right)\right\}^2\right]$$

$$=\frac{1}{10}\left\{25\left(x_1-\overline{x}\right)^2+25\left(x_2-\overline{x}\right)^2+\cdots\cdots+25\left(x_{10}-\overline{x}\right)^2\right\}$$

$$=25\cdot\frac{1}{10}\left\{\left(x_1-\overline{x}\right)^2+\left(x_2-\overline{x}\right)^2+\cdots\cdots+\left(x_{10}-\overline{x}\right)^2\right\}$$

$$=25X$$

より，$\dfrac{X'}{X}=25$（❸）

変更前の英語と数学の点数の共分散は

$$A=\frac{1}{10}\left\{\left(x_1-\overline{x}\right)\left(y_1-\overline{y}\right)+\left(x_2-\overline{x}\right)\left(y_2-\overline{y}\right)+\cdots+\left(x_{10}-\overline{x}\right)\left(y_{10}-\overline{y}\right)\right\}$$

変更後の英語と数学の点数の共分散は

$$A'=\frac{1}{10}\left\{5\left(x_1-\overline{x}\right)\left(y_1-\overline{y}\right)+5\left(x_2-\overline{x}\right)\left(y_2-\overline{y}\right)+\cdots+5\left(x_{10}-\overline{x}\right)\left(y_{10}-\overline{y}\right)\right\}$$

$$=5\times\frac{1}{10}\left\{\left(x_1-\overline{x}\right)\left(y_1-\overline{y}\right)+\left(x_2-\overline{x}\right)\left(y_2-\overline{y}\right)+\cdots+\left(x_{10}-\overline{x}\right)\left(y_{10}-\overline{y}\right)\right\}$$

よって，$\dfrac{A'}{A}=5$（❷）

(5)　1人転出しても平均値が変わらないので，転出した生徒は数学・英語ともに平均値と同じ点数。

よって，転出した生徒は⑥の生徒である。

該当の生徒が転校する前の10人の生徒の英語の点数の分散は

$$Y=\frac{1}{10}\left\{\left(y_1-\overline{y}\right)^2+\left(y_2-\overline{y}\right)^2+\left(y_3-\overline{y}\right)^2+\left(y_4-\overline{y}\right)^2+\left(y_5-\overline{y}\right)^2+\left(y_6-\overline{y}\right)^2+\left(y_7-\overline{y}\right)^2+\left(y_8-\overline{y}\right)^2+\left(y_9-\overline{y}\right)^2+\left(y_{10}-\overline{y}\right)^2\right\}$$

該当の生徒が転校した後の9人の生徒の英語の点数の分散は

$$Y''=\frac{1}{9}\left\{\left(y_1-\overline{y}\right)^2+\left(y_2-\overline{y}\right)^2+\left(y_3-\overline{y}\right)^2+\left(y_4-\overline{y}\right)^2+\left(y_5-\overline{y}\right)^2+\left(y_7-\overline{y}\right)^2+\left(y_8-\overline{y}\right)^2+\left(y_9-\overline{y}\right)^2+\left(y_{10}-\overline{y}\right)^2\right\}$$

であるが，$y_6=\overline{y}$，すなわち $y_6-\overline{y}=0$ より

$$Y''=\frac{1}{9}\left\{\left(y_1-\overline{y}\right)^2+\left(y_2-\overline{y}\right)^2+\left(y_3-\overline{y}\right)^2+\left(y_4-\overline{y}\right)^2+\left(y_5-\overline{y}\right)^2\right.$$

$$+\left(y_6-\overline{y}\right)^2+\left(y_7-\overline{y}\right)^2+\left(y_8-\overline{y}\right)^2+\left(y_9-\overline{y}\right)^2+\left(y_{10}-\overline{y}\right)^2\Big\}$$

$$=\frac{10}{9}\times\frac{1}{10}\Big\{\left(y_1-\overline{y}\right)^2+\left(y_2-\overline{y}\right)^2+\left(y_3-\overline{y}\right)^2+\left(y_4-\overline{y}\right)^2+\left(y_5-\overline{y}\right)^2$$

$$+\left(y_6-\overline{y}\right)^2+\left(y_7-\overline{y}\right)^2+\left(y_8-\overline{y}\right)^2+\left(y_9-\overline{y}\right)^2+\left(y_{10}-\overline{y}\right)^2\Big\}$$

$$=\frac{10}{9}Y$$

したがって，$\dfrac{Y''}{Y}=\dfrac{10}{9}$ が成り立つ。